● 顾任亮

也谈“井底之蛙”

——一个光学问题的探讨

在学习“光的传播”这一章内容时，许多参考资料上都例举了这样一个关于光的折射知识的问题：

井口和深度相同的两口井，一口是枯井，一口是水井（水面在井口之下），两井底部各有一只青蛙，则（　　）

（A）枯井蛙觉得井口大些

（B）水井蛙觉得井口大些

（C）晴天的夜晚，枯井蛙能看到更多的星星

（D）晴天的夜晚，水井蛙能看到更多的星星

其主要意图是借“井底之蛙”这一生动情景考察学生对光的折射定律及折射成像的理论深度，并都给出了（A）、（D）两个参考答案. 但本人觉得（A）和（B）选项需作进一步探讨. 下面我们就用几何知识讨论一下不同介质中折射成像的位置问题.

如图1所示，以水面所在直线为 x 轴，井壁所在直线为 y 轴，建立直角坐标系，A 点为井口位置，AB，AC 为 A 点发出的相距很近的光线，b、c 为其折射光线，反向延长 Bb，Cc 交 y 轴于 D、E，连结 DC. 令 $OA=a$，$OB=d$，$BC=m$，（a、d、$m\in R^+$）水对空气的折射率为 n，由几何知识得 $\angle OAB$、$\angle ODB$、$\angle OAC$、$\angle OEC$ 分别为 AB、AC 的入射角和折射角，由折射定律得

$$\frac{\sin\angle OAC}{\sin\angle OEC}=\frac{\sin\angle OAB}{\sin\angle ODB}=n\Rightarrow\frac{EC}{AC}=\frac{BD}{AB}=n.$$

在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AB=\sqrt{a^2+d^2}$.

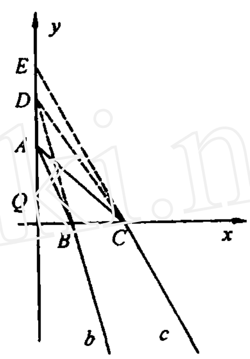

图1

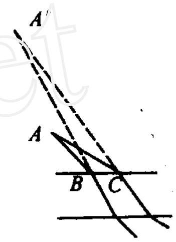

图2

所以 $BD=nAB=n\sqrt{a^2+d^2}$.

在 Rt$\triangle AOC$ 中，

$AC=\sqrt{a^2+d^2+2dm+m^2}$，

在 Rt$\triangle BOD$ 中，

$OD=\sqrt{BD^2-OB^2}=\sqrt{n^2a^2+(n^2-1)d^2}$.

在 Rt$\triangle COD$ 中，$CD=\sqrt{OD^2+OC^2}=\sqrt{n^2a^2+n^2d^2+2dm+m^2}$.

令 $EC=CD+\Delta x$，$CD+\Delta x=nAC$.

$\Delta x=\sqrt{n^2a^2+n^2d^2+2dmn^2+m^2n^2}-\sqrt{n^2a^2+n^2d^2+2dm+m^2}=x_1-x_2$.

因为 $n>1$，所以 $n^2-1>0$，

所以 $x_1^2-x_2^2=(n^2-1)(m^2+2bm)>0$，所以 $\Delta x>0$.

所以 $EC>DC$.

即 C 在 B 的右边，E 在 D 的上边，得 BD、CE 交于 y 轴左侧.

综上所述，A 点的像位于其上方偏左，水底

青蛙所见的“井口”应当在井口的上方且大于井口.

上述证明亦可例举几个数据代入求解;也可以通过测定玻璃折射率实验验证.

如图2,用玻璃砖先后测过 A 的两条入射光线 AB、AC 通过玻璃砖后的出射光线,从而确定它们的折射光线,再反向延长,A 的成像位置便显而意见.还有其它的方法这里就不提了.

江苏省西亭高级中学高二(1)班

● 朱银坪　吴若禹　徐维民

简单三次函数问题例析

简单三次函数是一类基本而特殊的函数,它常与函数图像的对称性、单调性、最值及相关参数的取值范围等问题紧密联系在一起.我们现以高考题和各地的模拟题为例分类予以说明.

一、确定与简单三次函数有关的对称性问题

例1　$y=f(x)$ 是定义在 R 上的函数,如果存在一个点 A,对函数 $y=f(x)$ 的图像上的点 P,P 关于 A 的对称点也在 $y=f(x)$ 的图像上,则函数 $y=f(x)$ 关于点 A 对称,A 为其对称中点.(a,b) 是 $y=f(x)$ 的对称中心的充要条件是对任意 $x\in R$,恒有 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 成立.

(1)求 $f(x)=x^3+3x^2$ 的对称中心;

(2)二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像是否有对称中心?如果有,求出一个;如果没有,说明理由.

分析:(1)设 (a,b) 是 $f(x)=x^3+3x^2$ 的对称中心,则对任意 $x\in R$,$(a+x)^3+3(a+x)^2+(a-x)^3+3(a-x)^2=2b$ 恒成立,即 $(6a+6)x^2+2a^3+6a^2=2b$ 恒成立,从而有 $\begin{cases}a=-1,\\ b=2.\end{cases}$

故　$A(-1,2)$.

(2)假设存在对称中心 $B(m,n)$,则对任意 $x\in R$,$a(m+x)^2+b(m+x)+c+a(m-x)^2+b(m-x)+c=2n$ 成立,即有 $2ax^2+2am^2+2bm+2c=2n$.

因为 $a\neq 0$,

所以 $x^2=\dfrac{n-am^2-bm-c}{a}$,

这与 x 的任意性相矛盾,即不存在对称中心.

例2　(1998年全国高考第24题)设曲线 C 的方程是 $y=x^3-x$,将 C 沿 x 轴、y 轴正方向分别平行移动 t、s 单位长度后得曲线 C_1.

(1)写出曲线 C_1 的方程;

(2)证明曲线 C 与 C_1 关于点 $A(\dfrac{t}{2},\dfrac{s}{2})$ 对称;

(3)如果曲线 C 和 C_1 有且仅有一个公共点,证明 $s=\dfrac{t^3}{4}-t$ 且 $t\neq 0$.

分析:本题第(1)小题实质是函数图像的平移,第(2)小题是解析几何中的点对称,而第(3)小题的求解可转化为对方程组解的判定.

(1)曲线 C_1 的方程是

$y=(x-t)^3-(x-t)+s$.

(2)在曲线 C 上任取一点 $B_1(x_1,y_1)$.设 $B_2(x_2,y_2)$ 是 B_1 关于点 A 的对称点,则